2022—2023 学年第一学期数学学院本科生微分流形期末大作业

布置时间：2022 年 12 月 6 日　提交时间：2022 年 12 月 30 日晚 24: 00 前

说明及要求

一、完成形式:

pdf 文件. 可以用 tex 生成 pdf 文件; 可以通过手写板得到 pdf 文件; 也可以先写在 A4 纸上, 拍照，然后将照片合成一个 pdf 文件. (教务要求电子存档)

二、提交方式:

发送邮件至 wangwl@nankai.edu.cn, 邮件标题为“微分流形大作业—学号—姓名”格式.

三、格式要求:

1. 大作业标题为“2022—2023 学年第一学期数学学院本科生微分流形期末大作业”, 大写居中; 下方写学号和姓名, 也居中.
2. 写题号和题目, 按顺序.
3. 如果手写, 要求字迹工整清晰. (若因字迹不清导致无法判断正误, 后果自负)

四、给分说明:

1. 满分 100 分.
2. 非标准答案的题目答案雷同扣分 (视相似程度).
3. 卷面分 5 分. (如果会 tex 的话, 鼓励用 tex 完成; 不会也别专门学了).
4. 大作业占最终成绩的 80%, 平时作业占 20%.

题目

1. 构造奇数维球面上处处非零的光滑向量场.

2. 对于 $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 上微分形式

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \frac{x^i}{|x|^n} dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^n,$$

计算 $d\omega$.

3. 设 $f : \mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^{m+1}$ 为非退化的对称双线性映射, 即对任意 x, y, $z \in \mathbb{C}^{n+1}$, λ, $\mu \in \mathbb{C}$, 有

(i) $f(\lambda x + \mu y, z) = \lambda f(x, z) + \mu f(y, z)$;

(ii) $f(x, y) = f(y, x)$;

(iii) $f(x, y) = 0$ 当且仅当 $x = 0$ 或 $y = 0$.

利用 f 构造映射 $\Phi : \mathbb{R}\mathrm{P}^{2n+1} \to \mathrm{S}^{2m+1}$: $\Phi([x]) = \frac{f(x,x)}{|f(x,x)|}$, 其中 $|\cdot|$ 表示对向量取模长.

(1) 证明: Φ 是良定义的, 且是嵌入.

(2) 对于任意 $a = (a_0, a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$, $b = (b_0, b_1, \cdots, b_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$, 令

$$\left(\sum_{i=0}^{n} a_i t^i \right) \left(\sum_{j=0}^{n} b_i t^j \right) = h_0(a, b) + h_1(a, b)t + \cdots + h_{2n}(a, b)t^{2n}.$$

再令

$$h(a, b) = (h_0(a, b), h_1(a, b), \cdots, h_{2n}(a, b)).$$

证明: $h : \mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^{2n+1}$ 是非退化的对称双线性映射.

(3) 证明: $\mathbb{R}\mathrm{P}^{2n+1}$ 可以嵌入到 $\mathbb{R}^{4n+1}$.

4. 设 f 为无边流形 M 上的光滑函数. 证明: 如果 $c \in \mathbb{R}$ 为 f 的正则值, 则 $f^{-1}((-\infty, c])$ 为带边流形.

5. 建立带边流形的单位分解定理并予以详细证明.

6. 自学微分形式的积分及 Stokes 公式相关内容, 写以下内容的详细证明: 微分形式积分的良定义性、基本性质、Stokes 公式.

7. 利用 Stokes 公式证明浮力定律, 或者写出一项你喜欢的应用.